G. Ancona 19/11/2021

$B/\mathbb{R}$ = courbe alg. proj. lisse $/\mathbb{R}$

$B(\mathbb{C})^G = B(\mathbb{R}) \subset B(\mathbb{C}) \circlearrowleft G$ = conj $\mathbb{C}x$

$\qquad\qquad\;\; \overset{\shortparallel}{\coprod S^1}$ $\qquad$ surf. de Riemann

Theorem $Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ cubique lisse définie par $F=0$

$F \in \mathbb{R}[x_0 \ldots x_n]^{hom}_{deg=3}$

Alors $\mathrm{Hom}_{Alg}(B, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{C^\infty}(B(\mathbb{R}), Y(\mathbb{R}))$ est dense. $(\dim Y \geq 2)$

Clé : approximation fine est stable par fibration

$\boxed{\S 1}$

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ B \end{array}$$

$X(\mathbb{C})$ lisse proj

G-equiv. surjec.

f vérifie l'approx. fine (AF)

RK : • $\Omega = B(\mathbb{C}) \Rightarrow$ holom = alg. GAGA

• $\Omega = B(\mathbb{C}) \setminus pt$ affine (i.e. STEIN)

$\Longrightarrow$ plein de functions

• la propriété $\forall u : \Omega \longrightarrow X(\mathbb{C})$ holo

(AF) intéressante

• u G-invar. $\longrightarrow$ utile pour géo réelle

(AF)

• jets fixés $\longrightarrow$ invariance birat.

(AF) (nature technique).

UTILE PER OGGI : $\forall u : \Omega \to X(\mathbb{C})$ holo

Définition : $Y/\mathbb{R}$ proj lisse vérifie

(AF) si $\forall$ $B/\mathbb{R}$ la fibration

triviale

$$\begin{array}{c} Y \times B \\ \downarrow \\ B \end{array}$$

vérifie (AF)

$(\Longrightarrow)$ $\mathrm{Hom}_{Alg}(B, Y) \underset{\text{dense}}{\subseteq} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hol}}(\mathcal{X}, Y)$

$(+\ G-\text{equiv}+\text{jets})^{\triangle}$

<u>Rem</u> : c'est la def qui nous interesse mais elle se comporte mal par fibrations

<u>Rp</u> : (1) Y verifie (AF) $\Rightarrow$ Y rat. connexe (RC)

<u>Preuve</u> : $x, y \in Y(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ couper $Y(\mathbb{C})$ par des hyperplanes passants par x, y

$C(\mathbb{C}) \subseteq Y(\mathbb{C})$ courbe
$x, y \in$

lisse par Bertini. On passe au revetement universelle

$\mathbb{P}^1, \underset{\cap\, \mathbb{P}^1}{\mathbb{C}}, \underset{\cap\, \mathbb{P}^1}{\mathbb{H}} \xrightarrow{(*)} Y$ qui touche x, y

(connecter pts cx)

on a des courbes holo par x, y

(AF) $\Rightarrow$ on trouve $\mathbb{P}^1 \longrightarrow Y$ qui passe par x, y (jets)

(*) xché G-équivariant ?

$$\begin{tikzcd} C/\mathbb{C} \arrow[d] \\ \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(2) $\mathbb{P}^n$ vérifie (AF) (Michele)

(3) (AF) est un inv. bir. (Matilde) : $\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "bir"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & B & \end{tikzcd}$ $(AF)_{X,f} = (AF)_{X',f'}$

(4) : de (2)+(3) $X \longrightarrow B$ fibrat. en quadrique vérifie (AF)

$\underbrace{\text{quadrique}}_{\text{fibre eq. deg } 2}$

<u>Preuve</u> : il se pourrait que

1^{er} cas $\nexists\, s : \Omega \to X$

<u>exemple</u> : $Q = \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$

quadrique $Q(\mathbb{R}) = \emptyset$

Comme base $B = \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ qui a des pts réels

$$\begin{array}{c} Q \times B \\ \downarrow \\ B \end{array}$$

A cause de la G-equiv. il n'y a pas des sections car il n'y a pas des pts réelle (ne abbiamo holom ma non G-equiv)

Def vide $\longrightarrow$ funzione. or.

2^{eme} cas :

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d] \\ B \supset \Omega \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

forme quadr. qui a des solutions analytique

$\Downarrow$ wiTT

il y a une section algebrique

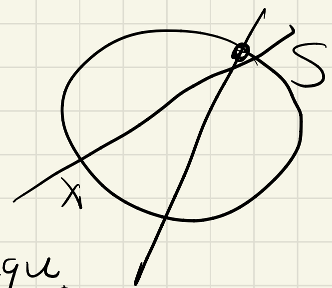
(seulement existence)

(d'un ouvert de Zariski de B)

Dans ce cas, cette fibration est birationnelle à $\mathbb{P}^n \times B$

$$\begin{array}{c} \mathbb{P}^n \times B \\ \downarrow \\ B \end{array}$$

car $\forall$ fibre $\to$ pt de la section



visto che ho grado 2 $\forall$ droite $\exists!$ altro pt.

quadrique $\xleftrightarrow{\text{bij}}$ droites par S

$\square$

cas restant:

(• Q pas reelle B pas reelle $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^n \times B$ n'a pas des pts reels non plus)

Theorem (de la fibration)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[d, "g"] \\ B \end{tikzcd}$$

$X, X' / \mathbb{R}$ proj lisse

Supposons que

(1) $X' \longrightarrow B$ vérifie (AF)

(2) $\exists$ fermé de Zariski $Z \subsetneq X'$ t.q. $\forall$ sections

s $\quad X' \underset{s}{\overset{}{\rightleftarrows}} B$ $\quad s(B) \not\subseteq Z$

(i.e. $s(B) \cap Z$ est fini)

la restriction de f à $X \xrightarrow{f} X'$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \cup & & \cup \\ f^{-1}(s(B)) & \to & s(B) \end{array}$$

lisse — à moins de utiliser la propr. bir.

$s(B) \overset{\sim}{\longrightarrow} B$ lisse comme sup. de Riemann

vérifie (AF)

Alors $g \circ f : X \longrightarrow B$ vérifie (AF).

Preuve :

RK :
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"] \\ Y'/\mathbb{R} \end{tikzcd}$$
Y' vérifie (AF)

$\forall$ presque toute fibre $f^{-1}(y)$ vérifie (AF)

$\overset{??}{\Longrightarrow}$ Y vérifie (AF)

(• TH precedente : Il fallait supposer dim positive fibres.)

On ne sait rien et c'est pas un cor. du th sepma

$$\begin{tikzcd} Y' \times B \arrow[d] \\ Y \times B \arrow[d] \\ B \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow$$

pb :
$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B) \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ B \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & Y \end{tikzcd}$$

cette fibr. n'est plus triviale!

$\boxed{\oint 2}$ $\underline{\text{Thm}}$ $Y/\mathbb{R}$ cubique de dim ≥ 2

vérifie (AF) $\Longrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{Alg}(B, Y) \subset$ dense

$\mathrm{Hom}_{Hol}(\Omega, Y(\mathbb{C}))$

<u>Rk</u> : $\dim Y = 1$ faux

$\hookrightarrow$ $g(Y) = 1$ et on a pas

des applic. de $\mathbb{P}^1 \longrightarrow Y$ $\square$

<u>Prop</u> : $Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ cubique dense

alors $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \subseteq Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$

inclusion linéaire

(<u>Preuve</u> : réduire dimension

$$\begin{array}{ccc} Y & \subseteq & \mathbb{P}^n \\ \cup\!\!| & & \cup\!\!| \\ Y \cap \mathbb{P}^{n-1} & \subseteq & \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$$

aussi deg 3 lisse (Bertini))

$\dim Y = 2$

$\xrightarrow{\text{etc.}}$ 27 droites sur Y

(impair $\rightarrow$ avons 1 réelle.

$\llcorner$

Construction (projection de la droite $L \subseteq Y$)

$$Y \setminus L \xrightarrow{\text{fibrat.}} \{\text{plans} \supseteq L\}$$

$\dim Y = d$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \\ y & \longmapsto & \text{plan passant par } y \text{ et conten. } L \\ & & \langle y, L \rangle \end{array}$$

Prop : La base est $\mathbb{P}^{d-1}$, les fibres sont birationelles à des quadriques de dim 1

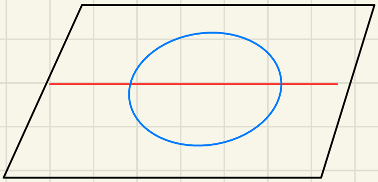
Preuve : base

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^{d+1} & & V_{d+2} \\ \cup\!\mid & & \cup\!\mid \\ \{\text{plans}\} & \xleftrightarrow{\text{version esp. vect.}} & \{W_3\} \\ \cup\!\mid & & \cup\!\mid \\ L & & V_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & V_{d+2}/V_2 & & & & & \\ & \cup\!\mid & & & & & \\ \xrightarrow{\text{quotient}/V_2} & \{W_3/V_2\} & \longleftrightarrow & \text{e. vect. de dim } 1 & \longleftrightarrow & \mathbb{P}^{d-1} \\ & \hookrightarrow \text{droites} & & & & \end{array}$$

fibre : on fixe un plan $P \supset L$

$F = \text{fibre} = \{y \in Y \setminus L : y \in P\}$



P

L

$$\begin{array}{c} \cap\! | \\ Y \cap P \\ \text{eq deg } 3 \\ \cup\! | \\ L \end{array}$$

$\Rightarrow \deg F = 2$

<u>Preuve (Th principale)</u> $\quad Y = $ cubique

$\forall B$
$$\begin{tikzcd} Y \times B \arrow[d] \\ B \end{tikzcd}$$
à étudier.

D'autre part
$$\begin{tikzcd} Y \overset{bir}{=} Q \arrow[d] \\ \mathbb{P}^{d-1} \end{tikzcd}$$
fibré en quadriques

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} Q \times B \arrow[d] \\ \mathbb{P}^{d-1} \times B \arrow[d] \\ B \end{tikzcd}$$

$\overset{\text{Th fibration}}{\Longrightarrow}$
$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^{d-1} \arrow[r, dashed] & B \arrow[l, bend left] \end{tikzcd} \text{ (AF)} \quad \checkmark$$

$$B \longleftarrow Q' \subseteq \mathbb{P}^{d-1}$$

Z = fibres de la fibr. qui sont singulières

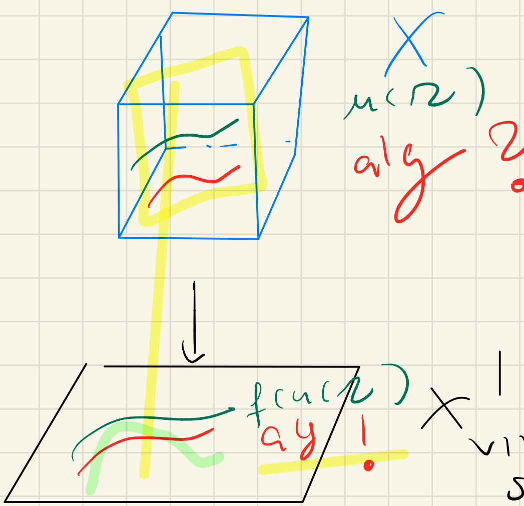
$\overbrace{\text{encore une fibration}}$ en quadriques $\square$

Rk : en dim=0 $\underset{2\text{ pts}}{Q_0} \neq \underset{1\text{ pt}}{\mathbb{P}^0}$

§3 Preuve thm de la fibration

Notation :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] & & \\ Z \subsetneq & X' \arrow[d, "g"] & & \\ & B & \supseteq & \Omega \arrow[lluu, bend right, "u"'] \end{tikzcd}$$



vive dans la fibre si cela vive dans Z, ça n'est marche pas.

hypothèse

Stratégie : construire $B \subseteq X'$ (1) proche à $f(\mu(\Omega))$ mais **PROBLÈME** B pourrait être dans Z. → de l'hypothèse (2)

Preuve : (Mattia) (1) avec la géo toroidale on peut supposer que $\mu(\Omega)$ vit où la fibration $f: X \to X'$ est une submersion.

(2)
$$\begin{tikzcd}
X \supseteq U & \mu(\Omega) \arrow[d, bend right, "(*)"'] \\
\downarrow & \downarrow \wr \\
X' \supseteq V & f(\mu(\Omega)) \arrow[dl] \\
\downarrow & \wr \\
B & \Omega
\end{tikzcd}$$

U, V voisin. Stein

$$\begin{array}{cc} U & V \\ \downarrow & \downarrow \\ \Omega & \Omega \end{array}$$
U & V voisinage d'un fibré vectoriel

(<u>loc</u> : th funct. implicite)

(<u>globale</u> : Stein)

(3) Les fibrés sont plein de sections (Stein)

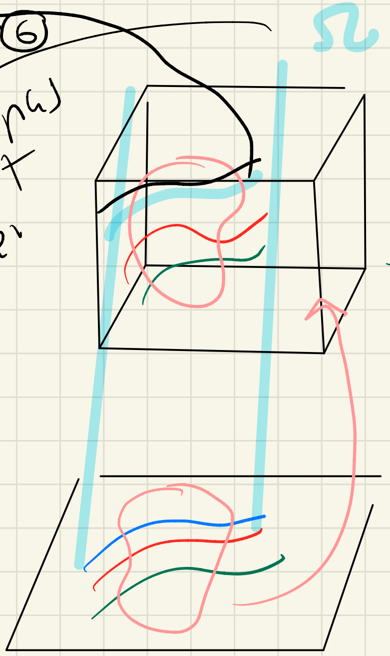
On peut bouger un peu u pour sortir de Z. $\notin f^{-1}(\text{alg})$

pas algébrique mais on peut approximer (6)

on peut pas directement appliquer (2)

Ω est pas le dedans a priori

perturb-analytique



Ω

encore pas dans Z

alg $\notin Z$

pas dans Z

(4) On prend une approx alg en bas dans X' elle ne sera pas dans Z.

(5) On peut construire une section analytique $V \xrightarrow{(*)} U$ t.q.

$f \circ u \longmapsto M$ (surjection des fibrés vectoriels sur un stein se scinde (pas de H^1))

⑥ A l'aide de (*) on a une courbe analytique $\subset X'$ au dessus de notre courbe alg $B \subseteq X$. On peut appliquer l'hypothèse (2) à

section du B

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ B \arrow[r, phantom, "\subset"] & X' \end{tikzcd}$$

(Guardare fibrati in cubiques).
esistenza sezione?

$$\begin{tikzcd} \text{Famille de cubique} \arrow[d] \\ B \arrow[u, bend right, "\text{section}"'] \end{tikzcd}$$